



Colle du 12/01 - Sujet 1
Matrices et analyse asymptotique

Question de cours.

1. Enoncer le $DL_6(0)$ de \sin .
2. Enoncer et démontrer la formule de Taylor-Young.

Exercice 1. Soit $J = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Calculer les puissances de J puis en déduire les puissances de $N = 2I + J$.

Exercice 2. Déterminer le comportement asymptotique en $+\infty$ de $f : x \mapsto x \ln(2x+1) - x \ln(x)$.



Colle du 12/01 - Sujet 2
Matrices et analyse asymptotique

Question de cours.

1. Enoncer le $DL_5(0)$ de ch .
2. Enoncer et démontrer le théorème sur la primitivation du développement limité.

Exercice 1. Déterminer un développement limité à l'ordre 4 en 0 de $f : x \mapsto \arctan\left(\frac{1+x}{1+2x}\right)$.

Exercice 2. Soient $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$, $M(t) = I_3 + tN + \frac{t^2}{2}N^2$.

1. Pour tout $(t, s) \in \mathbb{R}^2$, calculer $M(t)M(s)$.
2. Soit $t \in \mathbb{R}$. En déduire les puissances de $M(t)$. La matrice $M(t)$ est-elle inversible ?



Colle du 12/01 - Sujet 3
Matrices et analyse asymptotique

Question de cours.

1. Enoncer le $DL_6(0)$ de $\ln(1+x)$.
2. Enoncer et démontrer la formule de la trace du produit.

Exercice 1. Soit $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$. Déterminer un polynôme annulateur de A puis en déduire si A est inversible ainsi que ses puissances. Autre méthode ?

Exercice 2. La fonction suivante f admet-elle une tangente en 0 ? Si oui donner localement la position de la courbe par rapport à sa tangente.

$$f : x \mapsto \frac{e^{\sin(x)} - 1}{x}.$$